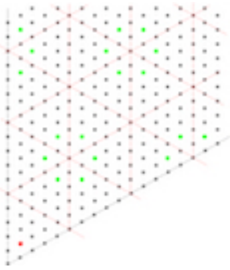
précédente suivante

Vers des formules de multiplicités pour les représentations modulaires des groupes algébriques réductifs

14 mai 2016



Simon Riche est lauréat de la médaille de bronze 2016. Spécialiste de théorie des représentations, il a apporté des éléments de compréhension importants sur la conjecture de Lusztig concernant les caractères des représentations simples des groupes algébriques réductifs. En particulier, dans des travaux avec Geordie Williamson et Pramod Achar, il a proposé (et démontré dans des cas importants) de nouvelles formules pour ces caractères.

Simon Riche travaille en théorie des représentations, théorie centrale en mathématiques en ce qu'elle étudie l'idée de symétrie, formalisée dans la notion de représentation de groupe. Parmi les applications de cette théorie à d'autres domaines, on peut citer la théorie des nombres avec par exemple la preuve du lemme fondamental par Ngô Báo Châu, ou les « représentations galoisiennes » utilisées dans la preuve du théorème de Fermat, ou bien encore la physique, la mécanique quantique ou la chimie.

Simon Riche s'intéresse en particulier à la théorie géométrique des représentations, dont le postulat est que pour résoudre des problèmes de théorie des représentations il est souvent utile de les « traduire » en des problèmes de géométrie, vue sous la forme de l'étude de faisceaux sur des variétés algébriques, puis d'utiliser les méthodes de la géométrie pour résoudre ces nouveaux problèmes. L'exemple fondateur de cette idée est la preuve en 1980, par Brylinski-Kashiwara et Beilinson-Bernstein indépendamment, d'une conjecture de Kazhdan-Lusztig (1979) concernant le calcul des caractères des représentations simples de plus haut poids des algèbres de Lie semi-simples complexes. Rappelons que les caractères sont une donnée « combinatoire » qui caractérise entièrement la représentation en en donnant en particulier sa dimension comme espace vectoriel. Dans un cadre général comme celui-ci, c'est ce qu'on peut espérer décrire de plus « explicite » concernant les représentations en question. Dans ce cas, ces caractères s'expriment en termes de ce qu'on appelle des « faisceaux pervers » sur une « variété de drapeaux » associée », puis peuvent être décrits de façon combinatoire en termes d'algèbre de Hecke.

Peu après la formulation de cette conjecture, Lusztig a proposé en 1980 une conjecture similaire donnant une formule pour les caractères des représentations simples (algébriques) des groupes algébriques réductifs sur un corps de caractéristique positive. Cette conjecture a attiré l'attention des plus grands spécialistes du domaine, et a finalement été démontrée sous l'hypothèse que la caractéristique est assez grande en combinant des travaux de Kazhdan-Lusztig (1993/94), Kashiwara-Tanisaki (1995/96), Andersen-Jantzen-Soergel (1994) et Fiebig (2012). Mais des résultats plus récents et très surprenants de Williamson (en 2013) ont montré que la conjecture est en fait fausse sous les hypothèses attendues, c'est-à-dire en caractéristique « pas trop grande ».

Dans des travaux avec Williamson (voir [4]), Simon Riche a proposé une nouvelle conjecture pour le calcul de ces caractères sous les hypothèses attendues pour la conjecture de Lusztig, et a démontré cette conjecture dans le cas des groupes réductifs les « plus naturels », les groupes généraux linéaires GL(n). Cette conjecture reprend une approche pour la conjecture de Lusztig initiée par

Andersen à la fin des années 90, et qui passe par l'étude d'une autre famille de représentations paramétrées par leur plus haut poids, les représentations « basculantes ». Le principal outil nouveau de cette approche est l'utilisation d'une certaine catégorie « diagrammatique » introduite par Elias-Williamson et qui permet de définir de nouvelles bases des algèbres de Hecke associées aux groupes de Coxeter.

Dans des travaux avec Pramod Achar (voir [3]), il a ensuite effectué un premier pas important vers une preuve générale de cette conjecture, qui adapte un programme initié par Bezrukavnikov dans les années 2000 pour l'étude « géométrique » des groupes quantiques de Lusztig en une racine de l'unité. L'étape restante pour compléter cette approche est une généralisation aux variétés de drapeaux affines d'une série de travaux antérieurs (toujours avec Pramod Achar, voir [1,2]) concernant la construction d'une « dualité de Koszul » pour les faisceaux pervers sur les variétés de drapeaux, suivant des idées de Beilinson-Ginzburg-Soergel et Bezrukavnikov-Yun.

Références :

[1] P. Achar, S. Riche : *Modular perverse sheaves on flag varieties I : tilting and parity sheaves*, avec un appendice en collaboration avec G. Williamson, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 49 (2016), 325-370.

[2] P. Achar, S. Riche : *Modular perverse sheaves on flag varieties II : Koszul duality and formality*, Duke Mathematical Journal 165 (2016), 161-215.

[3] P. Achar, S. Riche : *Reductive groups, the loop Grassmannian, and the Springer resolution*, prépublication.

[4] S. Riche, G. Williamson : *Tilting modules and the p-canonical basis*, prépublication.

Contact :

Simon Riche | Laboratoire de Mathématiques | Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II | UMR 6620